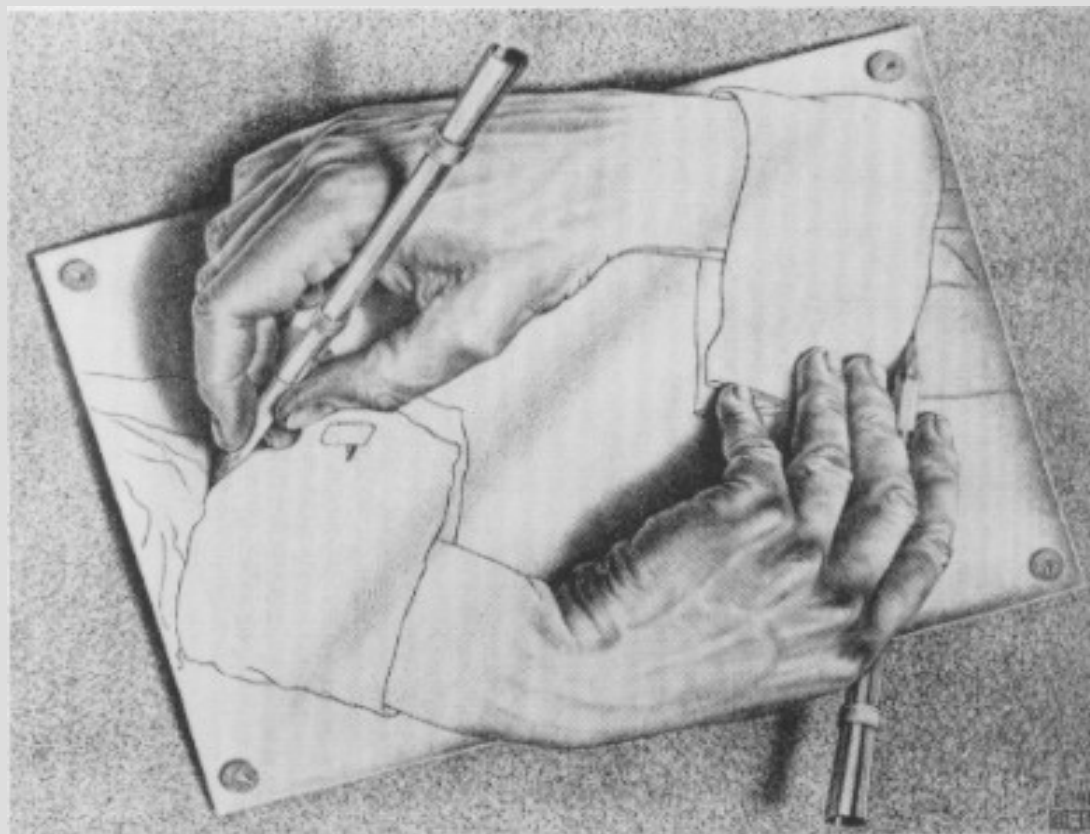


Parte 2

Ricorsione



[M.C.Escher – Drawing hands, 1948]

Funzioni ricorsive

- Una funzione si dice **ricorsiva** se richiama se stessa, direttamente o indirettamente
- La ricorsione si dice **diretta** se la funzione invoca se stessa senza intermediari
- La ricorsione si dice **indiretta** se coinvolge più di una funzione
 - Es: funzione uno() che invoca una funzione due() che a sua volta richiama uno()
→ uno() è stata chiamata due volte senza mai tornare al primo chiamante main()

Esempio

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
int main ()
{ fun(2) ;
  return 0 ;
}
```

Funzione ricorsiva
(diretta)

Che cosa fa il
programma?

Programma *ric1.cc*

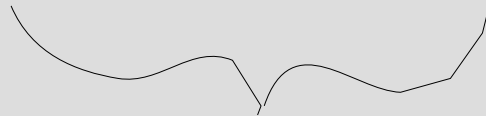
Soluzioni ricorsive

- La ricorsione è una ***soluzione concisa ed elegante*** per alcune tipologie di problemi (***non adatta a tutte!***)
 - Adatta a problemi complessi scomponibili in sottoproblemi più semplici
 - Utile per svolgere compiti ripetitivi su di un set di input variabili
- Alcuni problemi hanno una ***natura intrinsecamente ricorsiva***
 - Es: calcolo del fattoriale di un numero intero

Calcolo del fattoriale

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1$$

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5 * 4! = 120$$



$$(5 - 1)!$$

$$n! = n * (n-1)!$$

Intrinseca natura ricorsiva: si calcola il fattoriale di n calcolando il fattoriale di $n-1$

Pensate a come scrivere la funzione...

Funzione ricorsiva fattoriale

```
/* Legge in ingresso un numero intero n non  
negativo, e ritorna il valore n! */
```

```
int fattoriale (int n)
```

```
{
```

```
    if (n == 0)
```

```
        return 1;
```

```
    return n * fattoriale(n - 1);
```

```
}
```

Cosa succederebbe senza
questa istruzione?



- Programma *fatt_ricorsivo.cc*

Condizione di terminazione

Cosa succede se scriviamo:

```
void fun(int n)
{  cout<<n<<endl;
    // if (n>0)
    fun(n-1);
}
```

```
main () {
    fun(2);
}
```

?

Catena infinita di chiamate ricorsive!
Manca la **condizione di terminazione** *if (n > 0)*

Condizione di terminazione

- **Elemento necessario** in una funzione ricorsiva
- Determina la fine della catena delle chiamate ricorsive
- Presenza di un **caso base** che viene eseguito quando diventa vera la condizione di terminazione
 - Può identificare semplicemente la fine della catena ricorsiva
 - Può eseguire qualche specifica operazione

Argomento di controllo

- La ricorsione è controllata, attraverso la condizione di terminazione, da un argomento della funzione (o eventualmente più di uno), detto **argomento di controllo**
- In funzione del valore dell'argomento di controllo si sceglie se eseguire il caso base o la chiamata ricorsiva
 - Nel caso della chiamata ricorsiva, la funzione viene invocata passandole un **nuovo valore dell'argomento di controllo**
- Funzione simile alla variabile di controllo usata per la terminazione di un ciclo iterativo

Errori frequenti

Uno degli **errori più frequenti** nel caso di funzioni ricorsive è quello di **dimenticare o sbagliare la funzione di terminazione**

- La catena delle chiamate ricorsive non termina più
- Tipicamente il programma fallisce perchè i record di attivazione esauriscono lo **stack**
 - *Prova: eseguire ric1.cc senza condizione di terminazione*

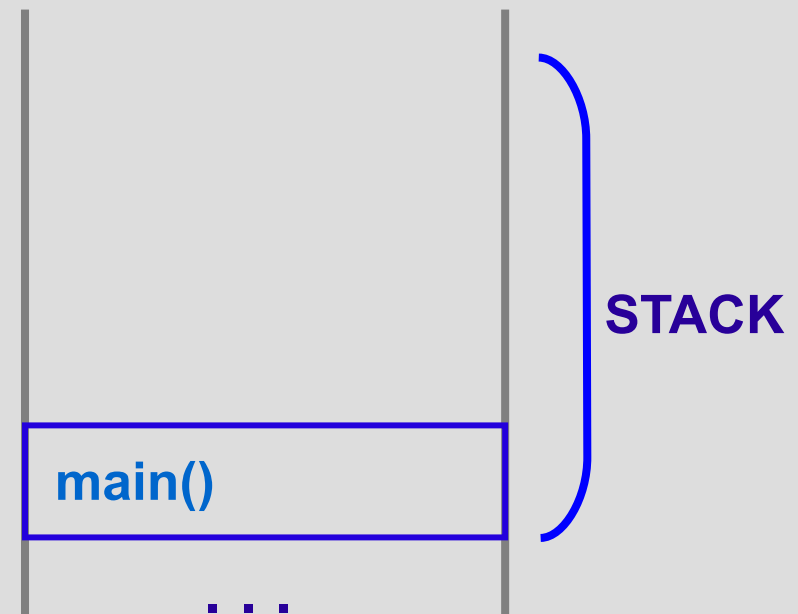
Record di attivazione

- Quando una funzione viene invocata, alcune informazioni vengono salvate sullo stack:
 - il punto del codice in cui è stata invocata (indirizzo di ritorno)
 - i parametri e le variabili locali
- L'insieme di questi dati sullo stack è detto ***record di attivazione***
- Cosa succede nel caso della ricorsione?

Esempio: fun()

```
void fun(int n)  
{ cout<<n<<endl ;  
  if (n>0)  
    fun(n-1) ;  
}
```

```
main () {  
  fun(2) ;  
}
```



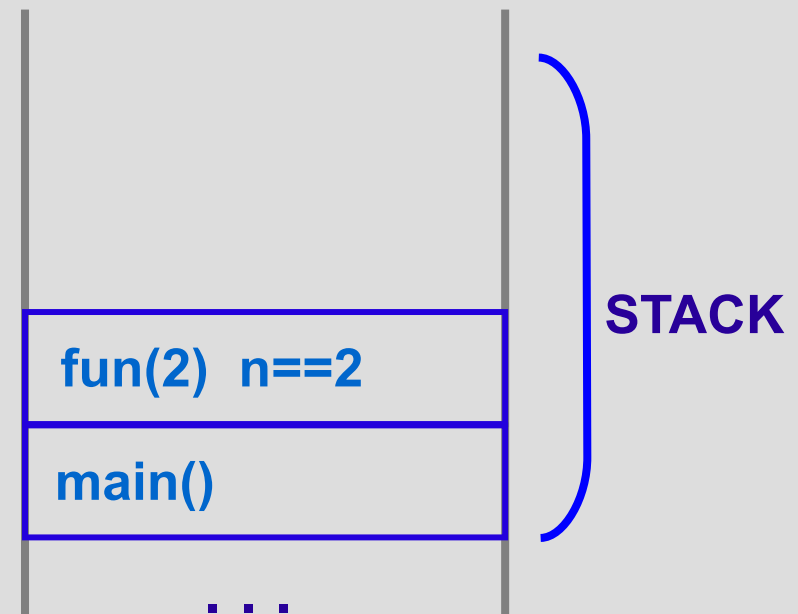
Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Esempio: fun()

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
main () {
  fun(2) ;
}
```



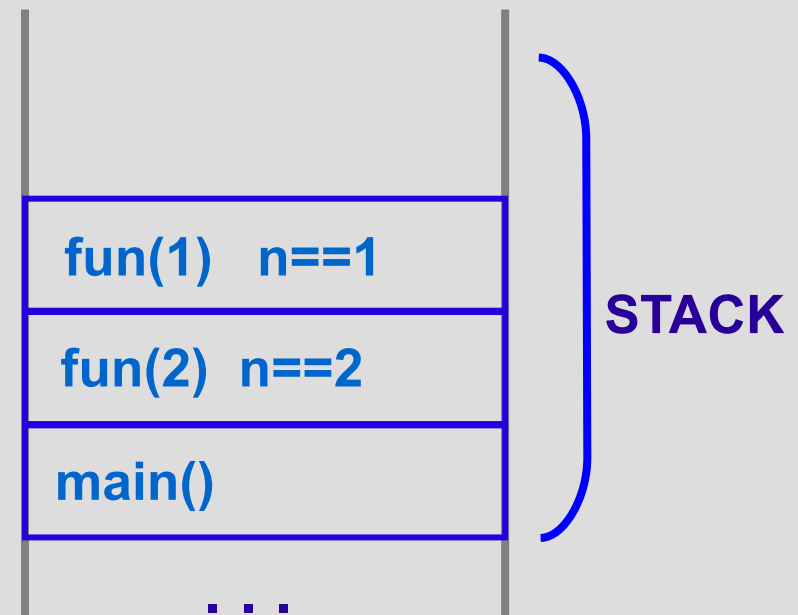
Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Esempio: fun()

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
main () {
  fun(2) ;
}
```



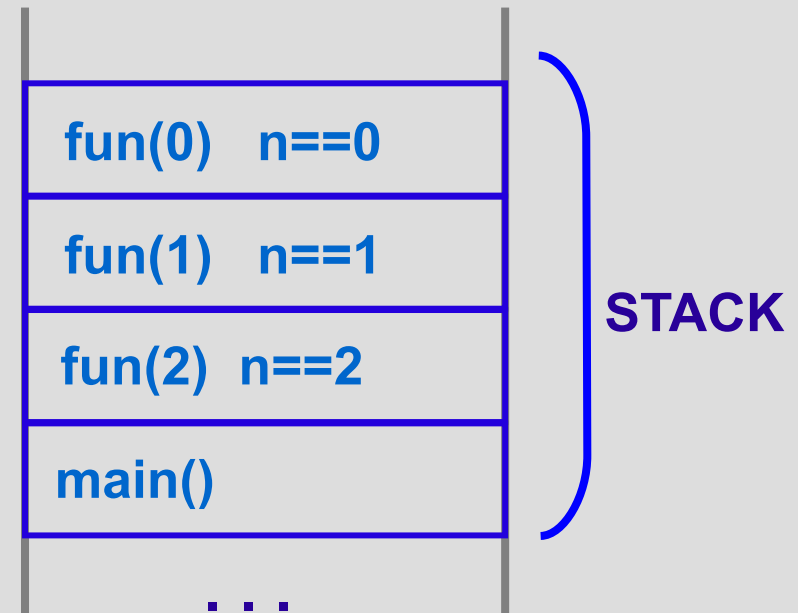
Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Esempio: fun()

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
main () {
  fun(2) ;
}
```



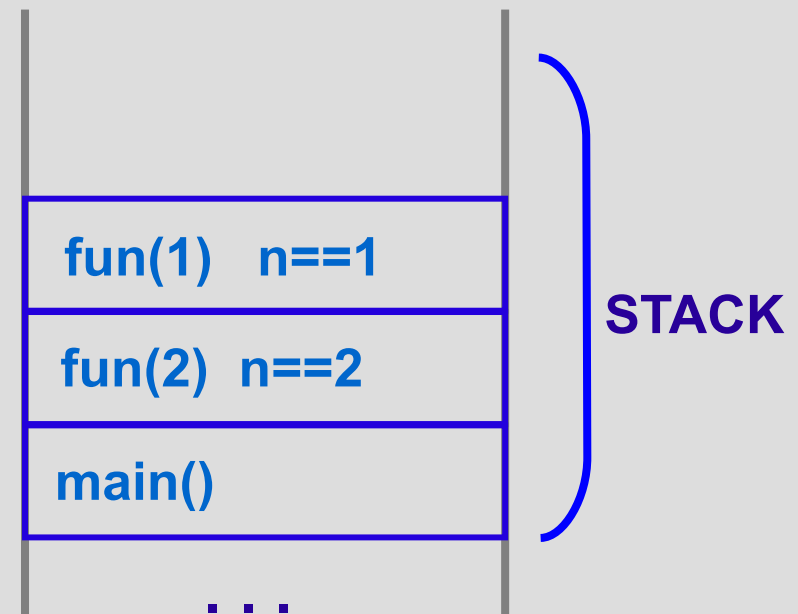
Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Esempio: fun()

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
main () {
  fun(2) ;
}
```



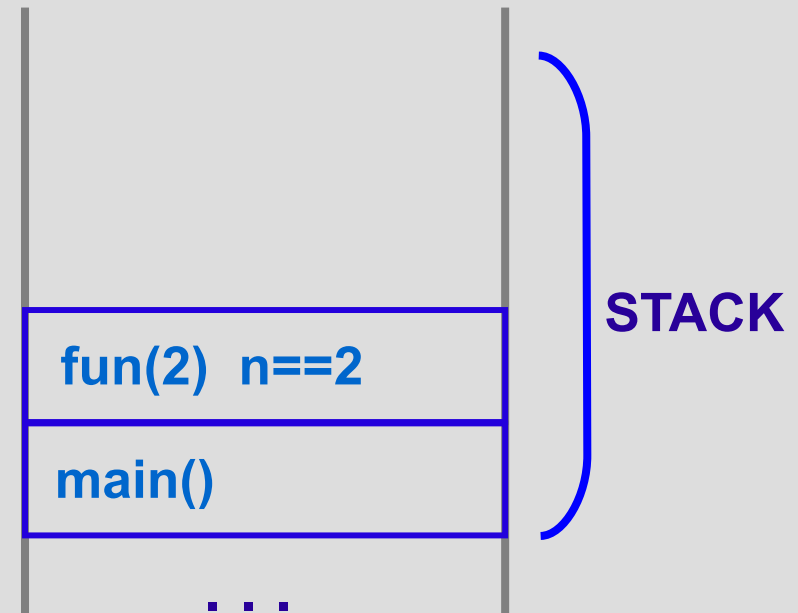
Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Esempio: fun()

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
main () {
  fun(2) ;
}
```



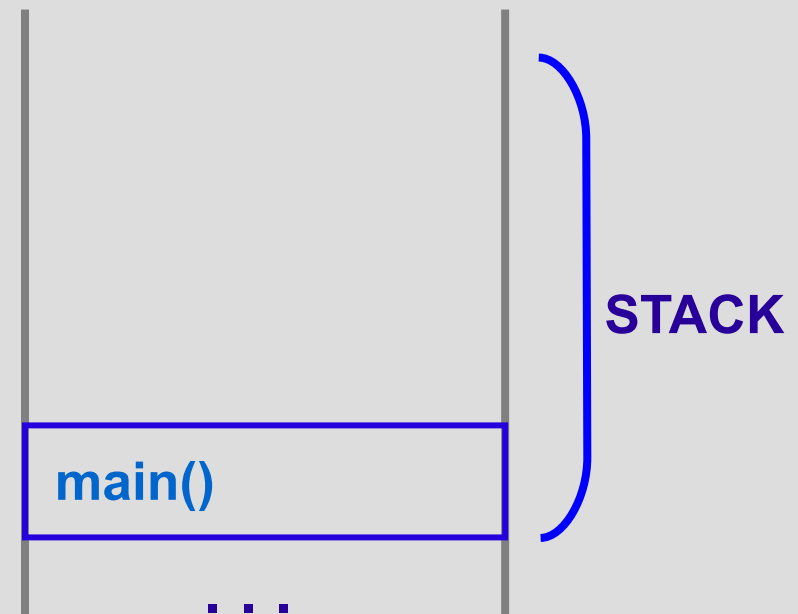
Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Esempio: fun()

```
void fun(int n)
{ cout<<n<<endl ;
  if (n>0)
    fun(n-1) ;
}
```

```
main () {
  fun(2) ;
}
```



Sequenza di attivazioni:

(S.O.)->main()->fun(2)->fun(1)->fun(0)

Istanze e variabili locali

- Quando una funzione viene invocata, viene creata una **istanza** della funzione
- Ogni istanza di una funzione ha una propria copia delle variabili locali e dei parametri formali (nel **record di attivazione**)
- Nel caso delle funzioni ricorsive possono esistere più istanze della stessa funzione nello stesso istante (**istanze multiple**)
 - Esempio precedente: esiste una copia con **diverso valore di n in ogni istanza di `fun()`**

Possibile forma della funzione

```
forma fun_ricorsiva (...)  
{  
blocco_istruzioni1;  
... = fun_ricorsiva(...); //se non  
                                //caso base  
blocco_istruzioni2;  
}
```

Programmi

- Stampa tutti i numeri da n a 1, con n inserito da utente
 - *Stampa_ric_decreasc.cc*
- Stampa tutti i numeri da 1 ad n, con n inserito da utente
 - *Stampa_ric_cresc.cc*

Ricorsione e scomposizione

```
algoritmo_ric(...) {  
operazioni da eseguire prima ;  
// eseguite man mano che la catena di  
// invocazioni ricorsive innestate viene costruita
```

```
(a meno che non si sia nel caso base) esecuzione  
ricorsiva algoritmo_ric su sotto-problema ;
```

```
operazioni da eseguire dopo ;  
// eseguite, in ordine inverso, man mano che la  
// catena di invocazioni ricorsive innestate  
// viene distrutta  
}
```

Potenza ricorsiva

- Programma *potenza_ric.cc*
- Calcolo ricorsivo della potenza di un numero reale elevato ad esponente intero, positivo o nullo

Potenza ricorsiva: suggerimenti

- Si può scrivere a^3 in funzione di a^2 ?

$$a^3 = a * a^2$$

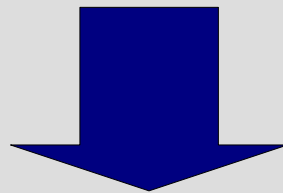
- In generale:

$$a^n = a * a^{(n-1)}$$

- C'è qualcosa da fare prima della chiamata ricorsiva?
- Qual'è la condizione di terminazione corretta?

Iterazione vs. ricorsione

- Entrambe implicano la ripetizione e si basano su un test di controllo
- **Ricorsione** → concisa ed elegante per problemi scomponibili
- **Iterazione** → meno concisa per lo stesso tipo di problemi, ma più efficiente nello spazio e nel tempo...
Perchè?



Non è necessario allocare spazio in memoria per un nuovo record di attivazione ad ogni chiamata ricorsiva

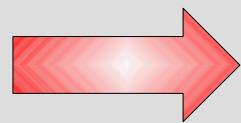
Domanda

- Alla luce delle considerazioni su iterazione e ricorsione, pensate che la soluzione ricorsiva sia la migliore per risolvere i problemi di calcolo di fattoriale e potenza di un numero n ?

NO!

Iterazione vs. ricorsione

- Alcuni problemi hanno un'implementazione ricorsiva naturale e intuitiva



semplificano il lavoro del programmatore sia nella scrittura che nella manutenzione

- Esempi:
 - Ricerca binaria ricorsiva in un vettore ordinato
 - Algoritmi di ordinamento
 - Visita di grafi ad albero

Non limitati ad un numero conosciuto di iterazioni!

Scomposizione nello spazio

- La ricorsione è un efficace schema di risoluzione per problemi scomponibili
- Ad esempio, un algoritmo che lavora su un array potrebbe ottenere il risultato finale desiderato lavorando su dei sotto-array
- Programma *trova_max_ricorsivo.cc*

Sudoku

- <http://it.wikipedia.org/wiki/Sudoku>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Algorithmics_of_sudoku#Brute-force_algorithm

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Mutua ricorsione

- Due funzioni si dicono **mutuamente ricorsive** se una invoca l'altra e viceversa
- Esempio:

```
int is_even(unsigned int n) {  
    if (n==0) return 1;  
    else return(is_odd(n-1));  
}  
  
int is_odd(unsigned int n) {  
    return (!is_even(n));  
}
```

NOTA: una prima funzione ne richiama una seconda che è definita in termini della prima

Ricorsione: considerazioni

Buone norme di programmazione:

- Verificare la correttezza della condizione di terminazione per evitare ricorsioni infinite
- Tenere sotto controllo lo stack
 - Eventuale uso di contatori di sicurezza
- Usare la ricorsione solo per problemi adatti
- Limitare la ricorsione ad una funzione
 - Ricorsioni mutue sono pericolose in quanto difficili da gestire e/o rilevare